Sbírka úloh k maturitě

Vážení maturanti,

do ruky se vám dostává sbírka úloh, která pokrývá všechna témata zkoušená u profilové zkoušky z matematiky. Jedná se o výběr z příkladů. Ve většině otázek nejsou základní nejjednodušší úlohy, protože se a) počítá s tím, že je maturant nemusí procvičovat, b) jsou k nalezení v patřičných učebnicích nakladatelství Prometheus a ve sbírce od Petákové. Pokud potřebujete více příkladů k procvičení některého tématu, použijte výše zmíněné zdroje. Pouze u otázek z volitelné matematiky jsou i základní úlohy.

Tato sbírka navíc většinou neobsahuje teoretické úlohy a otázky. Teorii, kterou je třeba umět k ústní zkoušce, naleznete v souboru "otazky - co umet".

Při učení postupujte zásadně od teorie k příkladům, nikoliv naopak!

Jakkoliv se vám zdá rozumné začít hned počítat (a derivovat) vše, co vám přijde pod ruku, je daleko lepší naučit se nejdříve teorii a pak ji procvičit na příkladech. Při opačném postupu se mohou fixovat chyby v úvahách a především - můžete mít mezery v teorii, které ani neobjevíte. Ideální postup je tedy projít teoretickou část, seznámit se se základními pojmy, naučit se je a následně spočítat úlohy z tohoto souboru.

Příkladů je skutečně mnoho, ale není nutné počítat vše. Typicky u otázek o funkcích a jejich grafech či základních rovnicích stačí většinou udělat 2-3 příklady a jet dál. Podobně analytická geometrie vypadá rozsáhlá, ale ve skutečnosti jde o příklady, které zaberou minutu.

Otázky z volitelné matematiky jsou naopak pokryté velmi bohatě, důvod je prostý - neexistuje rozumná středoškolská učebnice matic a diferenciálního a integrálního počtu. Spousta příkladů je ve sbírce od Petákové, která je dostupná volně online a lze si ji zadarmo stáhnout v PDF (především limity jsou tam dokonale zpracované).

Na webových stránkách naleznete navíc odkaz na stažení všech materiálů o teorii z volitelné matematiky. Určitě si vše stáhněte a projděte.

Přeji úspěšné počítání,

ZV

1. Výroky a množiny (základní pojmy a operace, číselné obory)

Příklad 1: Určete negaci výroku a následně rozhodněte, který ze dvou výroků je pravdivý, pokud je původní výrok nepravdivý, pokuste se ho opravit tak, aby byl pravdivý:

a. Pro všechny přímky p, q v rovině platí, že p je kolmá na q nebo p je rovnoběžná s q.

b. Pro všechny množiny A, B platí, že $A = B$, právě tehdy když A má stejný počet prvků jako B.

c. Existuje takový čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčky jsou stejně dlouhé a zároveň na sebe kolmé.

d. Pro každé racionální číslo a platí, že jestliže je $a \leq 1$, pak $\frac{1}{a} \geq 1$.

e. Existují taková dvě přirozená čísla a, b, že $a \cdot b$ je prvočíslo nebo $a \cdot b < 1$.

f. Je dána úsečka AB. Pro každý bod X v rovině platí, že X leží na ose úsečky právě tehdy když $|AX| = |BX|$.

g. Pro libovolné kladné reálné číslo platí, že $\sqrt{x} > x \Leftrightarrow x < 1$.

h. Existuje obdélník $ABCD$ takový, že jeho úhlopříčka $|AC|$ je kratší než jeho strana $|AB|$.

i. Všechny kořeny rovnice $x^2 - 4x + 2$ jsou kladné nebo racionální.

j. Každé přirozené číslo a je liché právě tehdy když $2a$ je sudé číslo.

k. Existuje reálné číslo x takové, že $x \cdot 8 = 0$ a zároveň $x \neq 0$.

l. Pro všechny trojice různých reálných čísel x, y, z platí, že jestliže $x \cdot y \cdot z$ ¿ 0, pak alespoň jedno z čísel x, y, z je kladné.

m. Každý trojúhelník ABC má nejvýše jeden tupý úhel a zároveň alespoň jeden ostrý úhel.

n*. Ke každé množině A existuje taková množina B, že $A \cap B = \emptyset$.

o. Existuje taková trojice různých reálných čísel a, b, c, že $a \cdot b \cdot c \in \mathbb{Q}$ a zároveň alespoň jedno z čísel a, b, c je iracionální.

p. Pro každé reálné číslo x platí, že $|x| > 0$ nebo $|x| = 0$.

q. Každá kvadratická rovnice $x^2 + ax + b = 0$, kde a, b jsou reálná čísla, má kořen v reálných čísel právě tehdy, když platí $a^2 - 4b > 0$.

Příklad 2: Negujte výroky a vyplňte jejich sloupec v tabulce pravdivostních hodnot:

a. $(A \Rightarrow B) \wedge (A \vee B)$

b.$(A \vee B) \Leftrightarrow B$

c.$(A \Rightarrow B) \wedge (A \Leftrightarrow B')$

d.$(A \vee B') \wedge (A \vee B)$

e.$(A \wedge B) \Rightarrow B$

f.$(A \wedge A') \Rightarrow A$

g.$(B \vee B') \Rightarrow (A \wedge B)$

Příklad 3: Je dána množina $A = \{x \in \mathbb{Q} | 1 < x \leq 6, \}$. Udejte příklad nekonečné množiny B a konečné množiny C takových, aby:

a. $A \cap B$ a $A \cap C$ byla nekonečná množina

b.$A \cup B$ a $A \cup C$ byla konečná množina

c. platilo $B \subseteq A$ a $C \subseteq A$ a následně určete doplňky těchto množin v A

2. Matematické důkazy (přímý a nepřímý, sporem, matematická indukce)

Příklad 1: Dokažte:

a. prvočísel je nekonečně mnoho

b. $\sqrt{2}$ je iracionální číslo. Promyslete, jak dokázat, že $n-$tá odmocnina z libovolného prvočísla je iracionální.

c. jestliže obvodový úhel příslušný tětivě AB při kružnici k má hodnotu α, má středový úhel příslušný této tětivě hodnotu 2α a tečna kružnice k v bodě A svírá s tětivou úhel α.

d. jestliže je trojúhelník ABC pravoúhlý s přeponou c, platí v něm $a^2 + b^2 = c^2$

e. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou c a bod P pata výšky na přeponu. Dokažte, že platí, že $|AP| \cdot |PB| = |PC|^2$ a $|AP| \cdot |AB| = |AC|^2$

f. součet úhlů v trojúhelníku je $180°$

g. Je dán čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že mu lze opsat kružnici, jestliže pro jeho vnitřní úhly platí $\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180°$. Dále dokažte, že mu lze vepsat kružnici, jestliže pro délky jeho stran platí $a + c = b + d$

h. $\forall x \in \mathbb{R} : \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

i. Dokažte, že v libovolném trojúhelníku ABC platí, že $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

j. počet podmnožin dané konečné množiny o n prvcích je 2^n

k. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$, dále $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$. Jak z toho plyne, že $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$ a $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$?

Příklad 2: Dokažte přímým důkazem, že každé prvočíslo větší než 3 musí dávat po dělení šesti zbytek 1 nebo 5.

Příklad 3: Dokažte matematickou indukcí, že $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Příklad 4: Dokažte matematickou indukcí, že $6|(n^3 + 11n)$

Příklad 5: Dokažte matematickou indukcí, že $73|(3^{4n} - 2^{3n})$

Příklad 6: Dokažte matematickou indukcí, že $2^0 + 2^1 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Příklad 7: Je dán trojúhelník ABC a v něm osa úhlu při vrcholu A. Dokažte, že tento trojúhelník je rovnoramenný, právě tehdy, když je tato osa kolmá na stranu a. (uvědomte si, že musíte dokázat dvě implikace!)

Příklad 8: Je dán trojúhelník ABC a v něm těžnice na stranu a. Dokažte, že tento trojúhelník je rovnoramenný, právě tehdy, když je tato těžnice zároveň osou úhlu při vrcholu A.

Příklad 9: Dokažte, že pro libovolné množiny A, B, C platí $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Příklad 10: Je dán libovolný trojúhelník ABC. Dokažte, že body B a C mají stejnou vzdálenost od těžnice na stranu a.

Příklad 11: Dokažte, že se těžnice protínají v jednom bodě a jsou jím děleny ve známém poměru.

Příklad 12: Dokažte, že se výšky trojúhelníku protínají v jednom bodě.

Příklad 13: Dokažte, že jestliže střed kružnice opsané leží ve stejném bodě jako střed kružnice vepsané, jedná se o rovnostranný trojúhelník.

Příklad 14: Nepřímým důkazem dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N} : 3|3n + n^2 \Rightarrow 3|n$.

Příklad 15: Nechť $\forall x, y \in \mathbb{R}$ platí vztah $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$. Dokažte, že z této rovnosti plynou všechny zbývající součtové vzorce.

Příklad 16: Dokažte, že $\forall z \in \mathbb{C} : z \cdot \bar{z} = x$, kde $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$

Příklad 17: Dokažte, že $(e^x)' = e^x$, $(\sin x)' = \cos x$, $(x^3)' = 3x^2$

3. Lineární rovnice a nerovnice (včetně absolutní hodnoty), soustavy lineárních rovnic

Příklad 1: Vyřešte rovnici (resp. nerovnici) pro $x \in \mathbb{R}$:

a. $|x-1| - |3x+2| = 4$

b. $1 - 2x - 3|x| = 4 - 2|x+4|$

c. $|x+1| - |x-2| + |x-3| - |x-4| = 2$

d. $3|x-4| - |x+5| - x > 2 - 3x$

e. $2|x+1| - 3|x-1| < 4$

f. $|2x+1|/3 - |x-4|/4 > 2$

Příklad 2: Vyřešte soustavu rovnic. Pokud se jedná o soustavu lineárních rovnic, použijte Cramerovo pravidlo, či Gaussovu eliminační metodu:

Soustavy lineárních rovnic o třech neznámých

31 Určete všechna čísla $x, y, z \in \mathrm{R}$ tak, aby byla řešením dané soustavy:

a) $$\begin{aligned} x + y + 2z &= -1 \\ 2x - y + 2z &= -4 \\ 4x + y + 4z &= -2 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 15 \\ 7x - y + z &= 9 \\ x + 2y + z &= 9 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ 4x + 2y + z &= 0 \\ x - y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 2x - y &= 6 \\ y + 4z &= 8 \\ x - z &= 1 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ x + y + 2z &= 4 \\ 4x + 3y + 3z &= 5 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 3 \\ x + y + z &= 2 \\ 4x + 3y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

Soustavy lineárních rovnic o více neznámých

32 Určete všechna čísla $x, y, z, u \in \mathrm{R}$ tak, aby byla řešením dané soustavy:

a) $$\begin{aligned} 2x - 3y + z + 2u &= 0 \\ 3x + y - 2z - u &= 6 \\ 4x - 2y - 3z - 4u &= -6 \\ x + 2y + 3z - 2u &= -7 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x - y + z + u &= 0 \\ x + y - z - u &= 2 \\ 2x - y + u &= 3 \\ 3x + z - u &= 0 \end{aligned}$$

Příklad 3: Vyřešte soustavu rovnic.

a) $$\frac{x+y+1}{x-y+1} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{x+y+1}{1-x+y} = 3$$

b) $$x + y = 5, \qquad xy = 6$$

c) $$x + xy + y = 7, \qquad x - xy + y = 1$$

d) $$x^2 + y^2 = 125, \qquad x^2 - y^2 = 25$$

e) $$2x^2 - 3y^2 = 24, \qquad 2x - 3y = 0$$

f) $$x^2 + 4y^2 - 2x = 15, \qquad x - y + 1 = 0$$

g) $$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}, \qquad x + y = -1$$

h) $$|x| + 2|y| = 10, \qquad 2x - 3y = 6$$

i) $$2x + y = 7, \qquad |x - y| = 2$$

j) $$xy + xy^2 = 18, \qquad x + xy^3 = 27$$

k) $$x^2y^2 - x^2y^3 = -4, \qquad x^2y^3 - x^2 = 7$$

l) $$x + y = 4, \qquad \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 3$$

4. Kvadratické rovnice a nerovnice (včetně vztahů mezi kořeny a koeficienty), iracionální rovnice

Příklad 1: Vyřešte rovnici (resp. nerovnici) pro $x \in \mathbb{R}$:

a. $x^2 - x2\sqrt{2} = \sqrt{2} - x$

b. $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$

c. $3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$

d. $\frac{x+1}{2-x} - \frac{1-2x}{x+3} = 0$

e. $\frac{3x+1}{x^2-3x-4} + \frac{1-2x}{x^2-1} \geq 0$

f. $\frac{x-1}{-x^2+5x-14} + \frac{x-1}{x^2-4} \leq 0$

g. $\frac{x^4-6x^2+9}{x^2+2x+1} - 9\frac{x^2-3}{x+1} + 18 = 0$

h. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-23} = 2$

i. $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} = 3$

j. $\sqrt{1-2x} + \sqrt{1-3x} = 1$

k. $\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} - \sqrt{\frac{x-2}{x+1}} = 1$

l. $\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}} - \frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}} = \frac{3}{x}$

Příklad 2: Určete kvadratickou rovnici, která má kořeny x_1, x_2 a její absolutní člen má hodnotu c, je-li dáno:

a. $x_1 = -1, x_2 = 3, c = 5$

b. $x_1 = -1, x_2 = 3, c = \sqrt{3}$

c. $x_1 = 2, x_2 = \sqrt{3}, c = 1$

d. $x_1 = 1 + \sqrt{2}, x_2 = 1 - \sqrt{2}, c = \sqrt{2}$

Příklad 3: vyřešte rovnici s komplexní neznámou x a reálným parametrem a:

a. $(2a+3)x^2 + x - a + 4 = 0$

b. $(a+1)x^2 + (2a-1)x + a - 1 = 0$

c. $\frac{ax}{x-1} - \frac{1}{x+2} = 0$

d. $\frac{3}{x+a} + \frac{a-1}{x-a} = \frac{2a}{x}$

Příklad 4: vyřešte nerovnici s reálnou neznámou x a reálným parametrem a:

a. $ax^2 - 4 \leq 0$

b. $x^2 - ax \geq 0$

c. $x^2 - a \leq 0$

5. Geometrie v rovině – konstrukční úlohy

U příkladů v této otázce proveďte vždy rozbor, zápis konstrukce, konstrukci (hodnoty prvků si zvolte) a diskusi.

Příklad 1: Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:

a. a, v_a, t_a

b. a, v_b, v_c

c. a, v_a, t_c

d. a, t_a, t_c

e. a, v_a, α

f. a, v_b, t_a

g. a, v_b, t_c

h. a, ρ_v, α

i. a, ρ_v, v_c

j. t_a, t_b, t_c

k. t_a, t_b, v_c

l. t_a, v_b, v_c

m. t_a, v_a, t_c

n. t_a, v_a, v_b

o. t_a, t_b, β

Příklad 2: Je dána přímka p a bod A, který na ní neleží. Sestrojte kružnici k, která se dotýká přímky p a prochází bodem A.

Příklad 3: Jsou dány dvě soustředné kružnice a sečna p obou kružnic. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají obou kružnic a přímky p.

Příklad 4: Jsou dány úsečky různých délek a, b, c, d. Sestrojte úsečku x, která má délku:

a. $x = \frac{a}{c}$

b. $x = a^2$

c. $x = \sqrt{ab}$

d. $x = \frac{a+b}{c+d}$

e. $x = \sqrt{a^2 - d^2}$

Příklad 5: Rozdělte úsečku AB bodem X tak, aby platilo, že $\dfrac{|BX|}{|AX|} = \dfrac{|AX|}{|AB|}$

6. Geometrie v rovině – výpočty

Příklad 1: Je dán čtverec $ABCD$, se stranou délky 6 cm. Bod S je průsečík jeho úhlopříček, bod K leží uvnitř úsečky AB, 2 cm od bodu B, bod M je střed úsečky SK. Určete:

a. vzdálenost bodu K od úhlopříčky AC.

b. obsah čtyřúhelníku $ADSK$

c. délky úseček SK a MC

d. poloměr kružnice opsané a vepsané čtverci $ABCD$ a následně poměr obsahů kruhů, které jsou určené těmito kružnicemi.

Příklad 2: Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ o straně a, jeho střed S a bod H, který je psůsečíkem přímek AC a BF. Určete a vyjádři v závislosti na a:

a. jeho obsah.

b. poměr délek kružnice opsané a vepsané

c. poměr obsahu kruhů, které jsou určené těmito kružnicemi

d. Obsah trojúhelníku ABH, jestliže $a = 2$

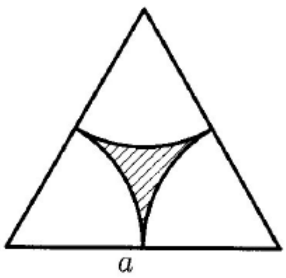
e. Vzdálenost DH, jestliže $a = 2$ a následně obsah trojúhelníku DBH

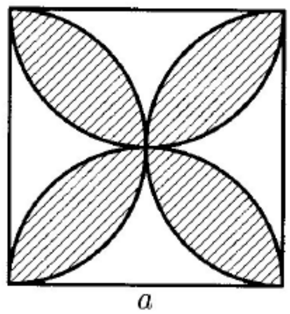
f. poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ACE

g. poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC

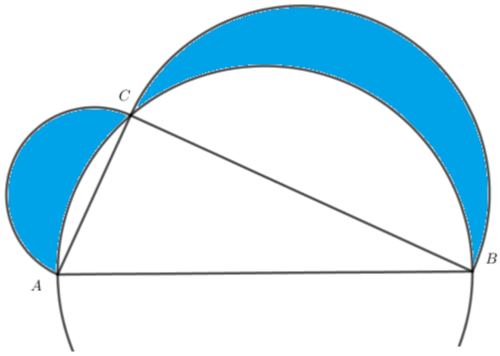
Příklad 3: Delší úhlopříčka kosočtverce má délku 12 cm a jeden z jeho vnitřních úhlů má velikost 40°. Určete jeho obsah.

Příklad 4: Vyjádřete obsah vyšrafované části v závislosti na a.





Příklad 5: Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou c. Opíšeme mu kružnici a nad jeho odvěsnami vytvoříme půlkružnice. Určete obsah modré části v závislosti na délkách odvěsen a, b.



7. Geometrie v rovině – užití zobrazení

Příklad 1: Narýsujte libovolný trojúhelník ABC (ať není rovnoramenný ani pravoúhlý) a následně ho zobrazte:

a. ve středové souměrnosti podle průsečíku O jeho výšek

b. v osové souměrnosti podle jeho těžnice na stranu a

c. v posunutí o úsečku $\overrightarrow{OT}$, kde O je průsečík jeho výšek a T je těžiště.

d. v otočení o $+75°$ okolo jeho těžiště

e. ve stejnolehlosti se středem K, který leží vně trojúhelníku a koeficienty 2, $\frac{4}{3}$ a $-\frac{3}{5}$

Příklad 2: Jsou dány rovnoběžky a, b a bod C uvnitř jejich pásu. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby $A \in a, B \in b$.

Příklad 3: Sestrojte trojúhelník ABC s obvodem $o = 15$ cm a vnitřními úhly $\alpha = 45°, \beta = 75°$.

Příklad 4: Je dána přímka p, kružnice k a bod S, který neleží ani na přímce, ani na kružnici. Sestrojte kosočtverec $ABCD$ tak, aby $AB \in p, D \in k$ a bod S byl jeho středem.

Příklad 5: Jsou dány dvě kružnice k, l a bod C. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC s úhlem při základně AB 15° tak, aby $A \in k, B \in l$

Příklad 6: Je dán čtverec $ABCD$. Sestrojte rovnostranný trojúhelník AXY tak, aby $X \in BC, Y \in CD$.

Příklad 7: Jsou dány rovnoběžky a, b a bod C uvnitř jejich pásu. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby $A \in a, B \in b$.

Příklad 8: Je dána kružnice k a úsečka AB. Sestrojte tětivu XY kružnice k, která je rovnoběžná se zadanou úsečkou a má stejnou délku jako tato úsečka.

Příklad 9: Jsou dány dvě soustředné kružnice, na vnitřní kružnici leží bod S. Sestrojte obdélník $ABCD$ se středem S tak, aby AB leželo na vnitřní kružnici a CD na vnější.

Příklad 10: Je dána kružnice k a uvnitř ní bod M. Najděte všechny tětivy AB kružnice k, pro které platí, že bod M je dělí v poměru 2:7.

Příklad 11: Je dán trojúhelník ABC. Vepište do něj čtverec $KLMN$ tak, aby $KL \in AB, M \in BC, N \in AC$.

Příklad 12: Sestrojte trojúhelník ABC s vnitřními úhly $\alpha = 60°, \beta = 75°$ a těžnicí $t_a = 5cm$.

Příklad 13: Sestrojte kosočtverec $ABCD$ s úhlopříčkami v poměru 3:5 a stranou délky 6 cm.

8. Funkce (pojem fce, základní vlastnosti, inverzní fce)

Příklad 1: Určete definiční obor funkce f:

a. $f : y = \dfrac{4\sqrt{5-x} - x^2}{x^2 + 10x + 16}$

b. $f : y = \sqrt{(8 - 2^x) \cdot (x^2 - 2x - 2)}$

c. $f : y = \ln\left(\dfrac{x^3 - 4x}{4 - 7x - 3x^2}\right)$

d. $f : y = \sqrt{\ln(x-3) - 2}$

e. $f : y = \sqrt{\sqrt{2-x} + \sqrt{6-x} - 4}$

f. $f : y = \sqrt{\sin\left(3x + \dfrac{2\pi}{3}\right) - \dfrac{1}{2}}$

g. $f : y = \log_{(1-2x)}\left(\dfrac{x^2 - 10x + 25}{29x - 3x^2 - 66}\right)$

h. $f : y = \sqrt{\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 2}{\ln(x+3) - 1}}$

Příklad 2: Nalezněte inverzní funkci f^{-1} k funkci f a určete definiční obory a obory hodnot obou funkcí:

a. $f : y = x^3 - 1$

b. $f : y = 2^{x-3} + 1$

c. $f : y = \log_7(x-2) - 4$

d. $f : y = \sqrt[4]{x-2} + 4$

e. $f : y = \dfrac{x-1}{3x+2}$

Příklad 3: Určete, zda je funkce f lichá, či sudá, je-li dáno

a. $f : y = \dfrac{x^2}{x^3 - 3x}$

b. $f : y = \dfrac{x^5 - x^2}{x - x^4}$

c. $f : y = x \cdot \sin x$

d. $f : y = e^x \cdot x^3$

e. $f : y = \cos x - \sin^4 x$

9. Racionální funkce (konstantní, lineární, kvadratická, mocninná, lineární lomená)

Příklad 1: Určete definiční obor a obor hodnot funkce f, její průsečíky s osami, intervaly, kde je rostoucí, klesající, kladná, záporná. Načrtněte její graf Rozhodněte, zda je lichá, sudá, či prostá. U kvadratických funkcí určete vrchol, u lineárních lomených posun počátku souřadnic a asymptoty:

a. $f: y = 3x - 4$

b. $f: y = 7 - \frac{5}{3}x$

c. $f: y = |x-1| - |2x-3|$

d. $f: y = x - |x| - |4x-1|$

e. $f: y = x^2 + 6x + 5$

f. $f: y = x^2 + 6|x| + 5$

g. $f: y = x^2 - 5|x-1| + 2$

h. $f: y = -2x^2 + 6x - 5$

i. $f: y = 3x^2 + 4x - 1$

j. $f: y = \dfrac{x+2}{x-1}$

k. $f: y = \dfrac{3x-2}{2x+4}$

l. $f: y = \dfrac{1-2x}{2x+3}$

m. $f: y = \dfrac{1}{|x|-2} + 3$

n. $f: y = \dfrac{1}{4+3|x|} + 1$

Příklad 2: načrtněte graf funkce, určete definiční obor:

a. $f: y = (x-2)^3 - 1$
b. $f: y = (x+3)^6 - 4$
c. $f: y = (x-1)^{-3} - 2$
d. $f: y = (x+4)^{-2} + 3$

Příklad 3: Pomocí grafů mocninných funkcí určete všechna reálná čísla x, pro která platí:

a. $x^3 > x^7$
b. $x^{-3} > x^{-5}$
c. $x^8 > x^2$
d. $x^{-4} > x^{-6}$

10. Exponenciální a logaritmická funkce, goniometrické funkce

Příklad 1: Určete definiční obor a obor hodnot funkce f, její průsečíky s osami, intervaly, kde je rostoucí, klesající, kladná, záporná. Načrtněte její graf Rozhodněte, zda je lichá, sudá, či prostá. U kvadratických funkcí určete vrchol, u lineárních lomených posun počátku souřadnic a asymptoty:

a. $f : y = 2^{(x-3)} - 4$

b. $f : y = 3^{(x+1)} - 2$

c. $f : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{(x+2)} + 1$

d. $f : y = \left(\frac{3}{2}\right)^{(x-1)} - 2$

e. $f : y = \log_2(x+3) - 1$

f. $f : y = 2\sin(3x)$

g. $f : y = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

h. $f : y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

i. $f : y = \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}$

j. $f : y = \sin\left(x - \frac{4\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$

k. $f : y = 2\cos x - \sqrt{3}$

l. $f : y = \mathrm{tg}\,(2x)$

m. $f : y = \mathrm{cotg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

n. $f : y = -\mathrm{tg}\, x$

11. Exponenciální a logaritmické rovnice a nerovnice

Příklad 1: Řešte rovnici či nerovnici pro $x \in \mathbb{R}$:

a. $2^{(x-1)} = 16$

b. $27 \cdot 3^{(x+1)} = \dfrac{1}{9}$

c. $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{(2x+1)} \geq \left(\dfrac{7}{3}\right)^{(4-x)}$

d. $316^{(x^2-11x+24)} < 1$

e. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{(3x-5)} = \sqrt{32}$

f. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{(x+2)} < \sqrt[4]{27}$

g. $\dfrac{6^{x^2}}{2^{-15}} = \dfrac{3^{-15}}{6^{12-12x}}$

h. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{(2-\sqrt{5x+1})} \leq 4 \cdot 2^{\sqrt{5x+1}}$

i. $9^{x+2} + 5 \cdot 9^{x+1} = 14$

j. $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$

k. $3^x + 3^{x+1} - 5^{x+1} = 5^x - 3^{x+3} + 5^{x+2}$

l. $6^{2x-3} = \sqrt{7}$

m. $12 = 4^{1-x}$

n. $x^{\log_2 x} = 64x$

o. $\log_2(x+14) - 6 = \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$

p. $\log_4(2x+5) - \log_4(x+1) = 1$

q. $x^{1+\log_3 x} = 9$

r. $(\sqrt{x})^{\log_2 x - 2} = x$

s. $\log_5(2x+3) \geq 1$

t. $\log_{\frac{1}{4}}(x+5) \geq -\frac{1}{2}$

u. $2\log_3^2 x + 5\log_3 x > -2$

v. $\log_{\frac{2}{3}}^2 x + 3 \leq 4\log_{\frac{2}{3}} x$

12. Goniometrická rovnice, trigonometrie

Příklad 1: Vyřešte s využitím jednotkové kružnice goniometrickou rovnici či nerovnici v základním tvaru pro $x \in \mathbb{R}$:

a. $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\cos\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{1}}{2}$

c. $\operatorname{tg}\left(x - \frac{5\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

d. $\operatorname{cotg}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = -1$

e. $\sin(4x - \pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

f. $\cos\left(\frac{x-\pi}{6}\right) = 0$

g. $\operatorname{tg}\left(3x + \frac{11\pi}{6}\right) > 1$

h. $\operatorname{cotg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) < 0$

i. $\cos\left(x + \frac{7\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

j. $\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \geq -\frac{1}{2}$

k. $\sin\left(2x - \frac{5\pi}{4}\right) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

l. $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \geq 0$

Příklad 2: Vyřešte s využitím jednotkové kružnice a goniometrických vzorců goniometrickou rovnici či nerovnici pro $x \in \mathbb{R}$:

a. $2\cos^2 x - 3 = 3\sin x$

b. $\cos^4 x - \sin^4 x = 1$

c. $\cos^2 x - \sin^2 x = \sqrt{3} \cdot \sin x - 2$

d. $2\cos^2 x = 2 + \sin x$

e. $\sin x + \sin 2x = 0$

f. $\cos 2x + \sin x \cos x = 1$

g. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$

h. $3\operatorname{cotg}^3 x + 3\operatorname{cotg}^2 x - \operatorname{cotg} x = 1$

Další goniometrické rovnice najdete v Petákové na straně 52.

13. Rovnice s parametrem

Příklad 1: Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$ a parametrem $p \in \mathbb{R}$:

a. $2p^2x - 3p = 1 - px + 2x$

b. $\dfrac{2x+p}{1+x} = 2 + \dfrac{3p}{x-p}$

c. $\dfrac{2x+p}{x+2} - \dfrac{p}{x-2} = p$

d. $(2p+3)x^2 + x - a + 4 = 0$

e. $x^2 - 2px + 2p^2 - 9 = 0$

f. $px^2 + p^2x + p = 0$

g. $(1-p)x^2 - (2p-1)x - p + 1 = 0$

h. $px^2 + (3p+2)x + 2a + 1 = 0$

Příklad 2: Určete, pro které hodnoty parametru $p \in \mathbb{Z}$ má následující rovnice právě jeden celočíselný kořen:

$$p(2-p)x = 4p$$

Příklad 3: Určete, pro které hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$ má následující rovnice dvojnásobný kořen:

$$(p+1)x^2 - 8x + p = 0$$

Příklad 4: Určete, pro které hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$ má následující rovnice komplexní kořeny:

$$(p+3)x^2 - 2x + p - 3 = 0$$

Příklad 5: Určete, pro které hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$ má následující rovnice jeden z kořenů roven nule a následně určete druhý kořen:

$$x^2 - (p+4)x + p^2 - 10x + 21 = 0$$

Příklad 6: Určete, pro které hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$ má následující rovnice jako kořeny navzájem opačná čísla:

$$x^2 - (p+3)x + p - 13 = 0$$

Příklad 6: Určete, pro které hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$ má následující rovnice jako kořeny navzájem převrácená čísla:

$$x^2 - (p+3)x + p - 13 = 0$$

Příklad 6: Určete, pro které hodnoty parametru $p \in \mathbb{Z}$ má následující rovnice jako kořen přirozené číslo:

$$p + 12 = 15x + 15 - p$$

14. Stereometrie

Příklad 1: Je dán kvádr $ABCDEFGH$ o stranách $|AB| = 6, |BC| = 4, |AE| = 12$. Střed hrany BC označme K, ve třetině hrany HG, blíže vrcholu H, leží bod L. Určete:

a. vzdálenost bodu K od přímky EF

b. vzdálenost bodu K od přímky AG

c. vzdálenost KL

d. vzdálenost bodu A od přímky KL

e. vzdálenost vodu L od roviny CFH

f. odchylku přímek BC a EK

g. odchylku přímek EG a CL

h. odchylku přímek AL a DH

i. odchylku přímky FD od roviny ABC

j. odchylku přímky KL od roviny ABC

k. odchylku přímky CL od roviny ADE

l. odchylku přímky BL od roviny ADE

Příklad 2: Je dán pravidelný šestiboký jehlan $ABCDEFV$ s hranou délky a a výškou $v = a$. Střed podstavy označme S. V polovině hrany VC leží bod M. Určete:

a. vzdálenost bodu M od přímky FC

b. vzdálenost bodu M od přímky AC

c. vzdálenost bodu M od přímky BC

d. odchylku přímky SM od roviny ABC

e. vzdálenost vodu C od roviny MDA

f. odchylku přímky AM od roviny ABC

Příklad 3: Proveďte řez krychle rovinou, která je dána body na hranách krychle, které mají tu vlastnost, že žádné dva neleží ve stejné stěně krychle.

Příklad 4: Proveďte řez pravidelného šestibokého hranolu a jehlanu rovinou, která je dána

a. třemi body na hranách tělesa, které nejsou podstavné

b. přímkou v rovině podstavy a jedním bodem na hraně tělesa (nikoliv v podstavě)

15. Objemy a povrchy těles

Příklad 1: Vypočítejte povrch a objem pravidelného osmistěnu, který má výšku 8 cm.

Příklad 2: Vypočítejte povrch a objem pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ s hranou podstavy délky 4 cm, jestliže:

a. výška jeho stěny je 6 cm

b. odchylka hrany AV od roviny podstavy je 45°

c. odchylka protějších bočních stěn je 30°

Příklad 2: Do rovnostranného kuželu (jeho řezem je rovnostrann trojúhelník) je vepsána koule. Určete, kolik procent objemu kužele zabírá tato koule.

Příklad 3: Do válce je vepsána koule. Určete, kolik procent objemu válce zabírá tato koule.

Příklad 4: Potřebujeme udělat karnevalovou čepici ve tvaru kužele vysokou 30 cm, která má obvod podstavy 45 cm. Určete, kolik je na ni třeba papíru, jestliže počítáme s desetiprocentním odpadem.

Příklad 5: Koule je rozdělena dvěma rovnoběžnými rovinami na tři části se stejným povrchem. Jaký je objem každé části?

Příklad 6: Vypočítejte povrch a objem pravidelného šestibokého hranolu, jestliže dvě jeho tělesové úhlopříčky ze stejného vrcholu mají délky 15 a 17 cm.

Příklad 7: Pravidelný čtyřboký komolý jehlan má objem 1510 cm^3. Určete jeho povrch, jestliže jeho podstavné hrany mají délky 10 a 18 cm.

Příklad 8: Na válec výšky 4 m a s průměrem 1 m postavíme kulový vrchlík, který má výšku 25 cm. Jaký objem a povrch má těleso? Jaký je poloměr koule, ze které vznikl vrchlík?

Příklad 9: Na válec výšky 4 m a s průměrem 1 m postavíme komolý kužel, který má výšku 25 cm a horní podstava má průměr 50 cm. Jaký objem a povrch má těleso?

Příklad 10: Určete objem a povrch koule, která je opsána krychli o straně 8 cm.

16. Analytická geometrie v rovině

Příklad 1: Jsou dány body $A[-5;3]$, $B[1;4]$, $C[2;7]$, které tvoří trojúhelník ABC. Spočítejte:

a. rovnici těžnice na stranu a v parametrickém, obecném, směrnicovém i úsekovém tvaru

b. rovnici výšky na stranu b

c. rovnici přímky p, která je rovnoběžná se stranou c a prochází bodem C.

d. odchylku výšky na stranu b a těžnice na stranu a

e. vzdálenost středu strany AB od strany b.

f. souřadnice středu kružnice opsané trojúhelníku ABC.

g. souřadnice průsečíku výšek trojúhelníku ABC.

h. velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.

Příklad 2: Jsou dány body $K[2;1]$, $L[-1;3]$, Rozhodněte o vzájemné poloze přímky KL a přímky AB. Pokud jde o rovnoběžky, určete jejich vzdálenost, pokud o různoběžky, najděte průsečík a odchylku. Najděte rovnici přímky AB v parametrickém, obecném, směrnicovém i úsekovém tvaru
a. $A[-2;2]$, $B[4;1]$

b. $A[1;7]$, $B[10;1]$

c. $A[5;7]$, $B[5;-3]$

c. $A[1;7]$, $B[5;7]$

17. Analytická geometrie v prostoru

Příklad 1: Jsou dány body $A[3;1;2]$, $B[-1;3;7]$, $C[1;1;3]$. Najděte obecnou rovnici roviny ABC a následně ozhodněte o vzájemné poloze roviny ABC a:
a. roviny $\rho : 2x + y - z - 1 = 0$

b. roviny $\sigma : -2x + 6y - 4z + 1 = 0$

c. přímky, která prochází body $K[2;2;1]$, $L[1;0;-1]$

d. přímky, která prochází body $E[4;-2;5]$, $F[3;1;3]$

Pokud jde o rovnoběžnost, určete vzdálenost, pokud o různoběžnost, najděte průsečík a odchylku. V případě různoběžných rovin určete jejich průsečnici, bod, kterým průsečnice prochází a její směrový vektor.

Příklad 2: Je dána přímka $p(A;\vec{u})$, kde $A[1;1;2], \vec{u} = (3;-1;-2)$. Určete:
a. Vzdálenost bodu $K[2;5;1]$ od této přímky

b. její vzájemnou polohu s přímkou, která prochází body $E[-2;1;4], F[1;-3;0]$

c. její vzájemnou polohu s přímkou, která prochází body $G[1;3;2], H[-1;0;1]$

d. její vzájemnou polohu s přímkou, která prochází body $I[4;3;4], J[1;4;6]$

Pokud jde o rovnoběžnost, určete vzdálenost, pokud o různoběžnost, najděte průsečík a odchylku. Pokud jde o mimoběžky, určete odchylku a jako bonus můžete určit i jejich vzdálenost.

18. Kuželosečky

Příklad 1: Určete, o jakou kuželosečku se jedná, načrtněte ji a určete všechny důležité prvky (*kružnice - střed a poloměr, elipsa - střed, vrcholy, ohniska, excentricita, délka poloos, hyperbola - střed, vrcholy, ohniska, excentricita, délka poloos, rovnice asymptot, parabola - vrchol, řídící přímka*)

a.$x^2 - 4y + 6x - 2 = 0$

b.$4x^2 - 16x - y^2 - 8y - 2 = 0$

c.$-2x^2 + 9y^2 - 54y + 63 = 0$

d.$x^2 - 4x + 4y^2 + 16y + 12 = 0$

e.$2x^2 - 12x + 9 + 12y = 0$

f.$3x^2 + 6x - 2y^2 + 12y - 27 = 0$

g.$25x^2 + 150x + 9y^2 - 18y + 9 = 0$

h.$-4x^2 - 8x + y^2 + 10y + 5 = 0$

i.$4x^2 - 4x + 4y^2 - 32y + 33 = 0$

j.$-2y^2 - 4y + 6 - 2x = 0$

k.$144x^2 - 480x + 144y^2 - 504y - 3767 = 0$

l.$y^2 + 2y + 6 - 8x = 0$

Příklad 2: Určete rovnici kružnice, která prochází body $A[2;3], B[-4;0], C[-1;2]$.

Příklad 3: Elipsa má ohniska v bodech $E[-1;0], F[1;0]$ a leží na ní bod $K\left[2; \frac{2\sqrt{10}}{3}\right]$. Určete všechny její prvky.

Příklad 4: Elipsa má vrcholy v bodech $[2;6], [2;-2], [4;2], [0;2]$. Určete její rovnici a ohniska.

Příklad 5: Najděte body, kde se protínají kružnice $k : x^2-4x+y^2-6y+5 = 0$ a $l : x^2+2x+y^2-4y-1 = 0$.

Příklad 6: Řídící přímka paraboly je kolmá na jednu z os a prochází bodem $M[2;3]$ a osa paraboly prochází bodem $K[6;3]$. Vzdálenost bodu K od ohniska je 2. Určete vrchol a rovnici.

Příklad 7: Osy hyperboly jsou totožné s osami souřadnic, její excentricita je 5 a hyperbola prochází bodem $Z[4;3]$. Určete všechny prvky hyperboly.

19. Vzájemná poloha přímky a kuželosečky, tečna křivky

Příklad 1: Je dána přímka $p : y = x - a$. Určete v závislosti na hodnotě parametru a možnou vzájemnou polohu s :

a. kružnicí $k(S; r)$, kde $S[1; -2], r = \sqrt{3}$

b. kuželosečkou $2x^2 - 4x + 3y - 1 = 0$

c. kuželosečkou $6x + y^2 - 2y - 8 = 0$

d. kuželosečkou $2x^2 + 4x + 3y^2 + 12y - 10 = 0$

Příklad 2: Je dána kružnice k se středem v bodě $S[-2; 3]$ a poloměrem 5. Najděte její tečny z bodu $A[13; 8]$ - použijte poláru.

Příklad 3: Je dána kružnice k se středem v bodě $S[-2; 3]$ a poloměrem 5. Najděte její tečny z bodu $A[13; 8]$ - použijte Thaletovu kružnici.

Příklad 4: Je dána elipsa $2x^2 - 4x + 3y^2 - 12y + 10 = 0$. Určete rovnici jejích tečen v bodech $T[1; t_y]$

Příklad 5: Je dána parabola $4y^2 - 24y + 28 + 8x = 0$. Určete rovnici všech přímek, které mají s touto parabolou společný právě jeden bod $T[-1; t_y]$.

Příklad 6: Je dána hyperbola $-6x^2 + 24x + 15y^2 + 90y + 81 = 0$. Určete rovnici jejích tečen v bodech $T[4; t_y]$

20. Kombinatorika

Příklad 1: Na výletě je 12 dívek a 21 chlapců. Kolika způsoby:
a. z nich vybereme 3 dívky a 2 hochy, kteří půjdou ráno nakoupit?
b. můžeme vytvoři rozpis 8 účastníků, kteří budou držet v noci hlídku?
c. můžeme vytvoři rozpis 8 účastníků, kteří budou držet v noci hlídku tak, aby šlo o alespoň 6 hochů?
d. z nich můžeme vytvořit 10 tanečních párů?

Příklad 2: Kolik existuje sedmimístných přirozených čísel:
a. která mají všechny číslice různé?
b. která obsahují pouze číslice 5 a 7?
c. která obsahují právě čtyři číslice 0?
d. která jsou složená z číslic 1234567 tak, že se žádná číslice neopakuje a výsledné číslo je dělitelné čtyřmi?

Příklad 3: Ve třídě je 16 studentů, z toho 5 dívek. v učebně je devět lavic po dvou místech. Kolika způsoby:
a. můžeme studenty rozesadit?
b. můžeme studenty rozesadit tak, aby žádné dvě dívky neseděly spolu?
c. můžeme studenty rozesadit, jestliže je nám jedno, jestli sedí v dané lavici vpravo nebo vlevo?

Příklad 4: Kolika způsoby můžeme z dvaceti týmů španělské ligy vybrat 8 týmů tak, aby:
a. nebyl vybrán Real Madrid?
b. byl vybrána Barcelona, ale nebyl vybrán Real Madrid?
c. byla vybrána Barcelona i Real Madrid?
d. byla vybrána Barcelona nebo Real Madrid? (pozn. matematické nebo je slučovací, tj. znamená "jeden, druhý, nebo oba zároveň")

Příklad 5: Ve firmě je 9 aut různých značek. Na výběr je ze 4 barev.
a. kolika způsoby lze těmto vozům vybrat barvu?
b. Kolika způsoby se mohou postavit na parkovišti s jedenácti místy?
c. 4 jsou modrá, 3 bílá a 2 černá. Kolika způsoby je lze postavit vedle sebe, jestliže sledujeme jen barvu auta?
d. 4 jsou modrá, 3 bílá a 2 černá, kolika způsoby lze rozhodnout, které auto bude mít kterou barvu?

Příklad 6: Heslo k emailu se skládá z některé z deseti číslic 0-9 nebo z některého z 26 písmen a-z.
a. Kolik umíme vytvořit sedmimístných hesel?
b. Kolik procent z nich obsahuje jen písmena?
c. Kolik čtyřmístných hesel lze poskládat z písmen a,b,c,d,e?
d. Je silnější pětimístné heslo složené z písmen nebo sedmimístné heslo z číslic??

Příklad 7: Ve třídě je 10 chlapců a 15 dívek. Na ubytovně pro ně mají jeden šestilůžkový, jeden pětilůžkový, dva třílůžkové a čtyři dvoulůžkové pokoje. Kolika způsoby se studenti mohou rozdělit **do pokojů**, jestliže:
a. Mohou být dívky s chlapci na jednom pokoji?
b. Nemohou být dívky s chlapci na jednom pokoji?
6 z nich už je na šestilůžkovém pokoji. Kolika způsoby se mohou rozmístit na postele, jestliže:
c. se jedná o palandy a jim jde jen o to, kdo bude dole a kdo nahoře
d. se jedná o palandy a jde jen o to, kdo s kým bude na stejné palandě?

Příklad 8: Fotbalový trenér má v týmu 3 brankáře, 6 obránců, 9 záložníků a 5 útočníků. Kolika způsoby může vybrat zahajovací jedenáctičlennou sestavu, jestliže:
a. Chce hrát systémem 3-5-2? (to jest 3 obránci, 5 záložníků, 2 útočníci - brankář je na hřišti vždy)
b. Chce hrát systémem 5-4-1?
c. Chce hrát systémem 3-4-3?
d. Jestliže už má zvolenou zahajovací sestavu, kolika způsoby dovybere 5 hráčů na střídačku tak, aby v ní byl právě jeden náhradní brankář?

Příklad 9: V akademickém senátu univerzity má každá ze sedmi fakult devítiičlenné zastoupení. Kolika způsoby můžeme vybrat 7 prorektorů, jestliže:
a. chceme, aby každá fakulta měla prorektora?
b. Lékařská fakulta má mít právě 3 prorektory a ostatní fakulty nejvýše jednoho?
c. Jedna z fakult má obsadit všechny prorektory?
d. vyřešte a a b ještě jednou, ale tentokrát rozlišujte jednotlivé prorektoráty (prorektor pro vědu, prorektor pro zahraničí…)

Příklad 10: Šest přátel vyrazilo do restaurace. V menu je 8 předkrmů, 11 hlavních jídel a 3 dezerty. Kolika způsoby si mohou objednat každý předkrm, hl. jídlo a dezert, jestliže:
a. chtějí všichni stejný dezert?
b. Chtějí každý různé hlavní jídlo?
c. Alena bude jíst jen předkrm a hlavní jídlo nebo jen hlavní jídlo a dezert. Kolik má možností?
d. Nechají si přinést 4 předkrmy a 3 hlavní jídla a podělí se o ně.

Příklad 11: Kolika způsoby lze na šachovnici 8x8 rozestavit:
a. 6 bílých pěšců tak, aby byli ve stejném sloupci?
b. 5 různých figur tak, aby stály na dvou bílých polích a třech černých?
c. 16 zahajovacích figur jedné barvy do dvou prvních řad? (8 pěšců, dvě věže, dva jezdci, dva střelci, dáma a král)

Příklad 12: Z balíčku karet na poker (13 karet různých hodnot ve čtyřech barvách) vytáhneme 5 karet. Kolik je možností, že:
a. tyto karty budou všechny srdcové?
b. tyto karty budou obsahovat alespoň tři esa?
c. tyto karty budou jen dvojky a trojky?
d. půjde o 5 karet různých hodnot?

Příklad 13: Je dán výrok

OD POKLOPU KE POKLOPU KYKLOP KOULI KOULI

Kolika způsoby lze tento výrok zapsat jako řadu písmen?

Příklad 14: 19 studentů čtvrtého ročníku si má vybrat jeden ze čtyř různých volitelných předmětů.
a. Jaké mohou být počty studentů u jednotlivých předmětů?
b. Jaké mohou být počty studentů u jednotlivých předmětů, jestliže víme, že každý z předmětů si jistě zapíší alespoň 2 studenti

Příklad 15: U novinového stánku prodávají Lidové noviny, Hospodářské noviny, Právo, Mladou Frontu a Blesk. Od každých novin mají 20 kusů. Kolika způsoby lze koupit 21 kusů novin?

21. Pravděpodobnost

Příklad 1: Z pokerového balíčku (4 barvy - srdce, káry, piky, kříže, od každé barvy 13 hodnot - 2,3,4... 10,J,Q,K,A) táhneme zcela náhodně 5 karet. Jaká je pravděpodobnost, že:
a. všechny tažené karty mají stejnou barvu?
b. všechny tažené karty jsou srdcové?
c. mezi těmito pěti kartami jsou právě tři karty stejné hodnoty?
d. se jedná o po sobě jdoucí hodnoty karet?
e. mezi těmito pěti kartami jsou právě dvě karty stejné hodnoty?
f. mezi těmito pěti kartami jsou dvě dvojice karet stejné hodnoty a pátá karta je jiná?
h. mezi těmito pěti kartami jsou tři karty stejné hodnoty a dvě karty stejné hodnoty?

Příklad 2: Řidič jede přes České Budějovice, kde má na své trase 9 světelných křižovatek, které mají na semaforech pouze dvě barvy - zelenou a červenou. Pravděpodobnost, že na dané křižovatce svítí červená, činí $\frac{3}{5}$. Jaká je pravděpodobnost, že při jízdě řidič dostane zelenou na alespoň šesti křižovatkách?

Příklad 3: Student se zapomněl naučit na test, který obsahuje 15 otázek. Na každou otázku je možné odpovědět právě jedním správným způsobem a je nabízeno 5 možností. Student doufá, že při tipování bude mít alespoň 75% pravděpodobnost, že uspěje. Kolik špatných odpovědí by v tom případě musel mít povoleno?

Příklad 4: 29 studentů se dostalo na vysoké školy. Do Prahy půjde 14 z nich, do Brna 9, do Olomouce 4 a po jednom do Plzně a Ústí nad Labem. Losujeme náhodně pětici studentů. Jaká je pravděpodobnost, že:
a. vylosujeme alespoň jednoho studenta, který jde do Olomouce?
b. vylosujeme 5 studentů ze stejného města?
c. vylosujeme z každého města právě jednoho studenta?

Příklad 5: Hodíme čtyřmi kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že
a. Padne alespoň na jedné z nich sudé číslo?
b. Padne alespoň na jedné číslo 1?
c. Padne součet 16?
d. Padnou navzájem různá čísla?

Příklad 6: Ve skupině 32 studentů jsou také Jeníček a Mařenka. Jaká je pravděpodobnost, že
a. Při losování pětice studentů v nich budou oba?
b. Při losování pětice studentů v nich bude alespoň jeden z nich?
c. Při dělení do čtyř skupin po osmi budou oba ve stejné skupině?

Příklad 7: V nemocnici mají dva přístroje. Starší z nich určuje správnou diagnózu s pravděpodobností 0,93, modernější přístroj s pravděpodobností 0,97. Jaká je pravděpodobnost, že
a. Oba přístroje určí správnou diagnózu?
b. Oba přístroje určí špatnou diagnózu?
c. Starší přístroj určí diagnózu správně, zatímco modernější špatně?

Příklad 8 (Binomická věta): Určete hodnotu čísla x tak, aby:
a. pátý člen rozvoje $\left(\frac{2}{x} - \sqrt{x}\right)^9$ byl roven 2016
b. sedmý člen rozvoje $\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[6]{1-x}\right)^9$ byl roven 63

22. Posloupnosti (pojem, zadání, vlastnosti, limita), aritmetická posloupnost

Příklad 1: Dokažte, zda je daná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ klesající nebo rostoucí (či ani jedno), jestliže je dán vzorec pro $n-$tý člen:
a. $a_n = \log_{\frac{1}{2}}(n\sqrt{n})$
b. $a_n = n^2 - n^3$
c. $a_n = \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n}$

Příklad 2: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická. Najděte její diferenci, první člen a součet prvních dvanácti členů, jestliže:
a. $a_7 = -7, a_{13} = -2$
b. $a_9 = 8, a_{13} = 1$
c. $a_5 = 116, a_{19} = 445$

Příklad 3: Vypočítejte:
a. součet všech trojmístných sudých přirozených čísel
b. součet všech trojmístných přirozených čísel dělitelných sedmi

Příklad 4: V železárnách jsou na sobě vyskládané roury tak, že v každé vyšší řadě je o jednu rouru méně, než v předchozí. Jaká je hmotnost celé hromady, jestliže jedna roura váží 180 kg, roury jsou v osmi řadách a v horní řadě je 32 rour?

Příklad 5: Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Obvod trojúhelníku je 96 cm. Určete délky stran.

Příklad 6: Určete první člen a diferenci AP $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, jestliže platí:
a. $a_3 + a_1 = 2, a_2 + a_7 = -8$
b. $2a_2 - a_3 = 20, a_4 - 5a_1 = -95$
c. $a_5 \cdot a_4 = -5, a_4 + a_5 = 4$
d. $a_3 + a_5 = 8, a_3^2 - a_5^2 = 32$

Příklad 7: V AP $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je první člen roven deseti a diference má hodnotu -2. Určete, který člen se rovná šestině součtu všech předchozích členů.

23. Geometrická posloupnost, nekonečné řady

Příklad 1: Určete první člen, součet prvních osmi členů a kvocient GP $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, jestliže platí:
a. $a_4 = \frac{9}{2}, a_6 = \frac{81}{4}$
b. $a_3 = \frac{2}{3}, a_7 = \frac{32}{27}$
c. $a_{14} = 8, a_9 = 64$
d. $a_1 + a_2 - a_4 = -110, a_2 + a_3 - a_5 = -220$
e. $a_8 - a_4 = 360, a_7 - a_5 = 144$
f. $a_2 \cdot a_3 = 9, a_2 + a_3 = 10$

Příklad 2: Dokažte, že čísla $\sqrt{5} - \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5} + \sqrt{2}$ jsou třetím, čtvrtým a pátým členem jisté geom. posloupnosti. Určete její kvocient a první člen.

Příklad 3: V GP s prvním členem 36 určete kvocient tak, aby platilo, že součet prvních 3 členů je menší nebo roven 252.

Příklad 4: Průchod skleněnou deskou zeslabí světlo o 4%. Kolik takových desek musíme použít, abychom zeslabili světlo na polovinu?

Příklad 5: Kolik peněz musíme vložit na spořicí účet s roční úrokovou mírou 8,5%, jestliže chceme, aby výnos po 5 letech činil 50 tisíc korun? Uvažujte daň z úroku ve výši 15%.

Příklad 6: Pan Nový si půjčil u banky 600000, které hodlá splatit v pěti stejných ročních splátkách. Určete hodnotu splátky, jestliže roční úroková míra činí 18%.

Příklad 7: Rozhodněte, které z následujících posloupností jsou konvergentní a určete jejich limity:
a. $\left(\frac{n^2-3n^3}{n^3-n}\right)_{n=1}^{\infty}$
b. $\left(\frac{4n^5-n^2}{n^6-1}\right)_{n=1}^{\infty}$
c. $\left(\left(\frac{n-4}{n-2}\right)^{(2n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$
d. $\left(\left(\frac{n+1}{n-3}\right)^{(3n-2)}\right)_{n=1}^{\infty}$
e. $\left(\sqrt{n^2 - 3n} - n\right)_{n=1}^{\infty}$
f. $\left(\sqrt{4n^4 + n^2} - 2n^2\right)_{n=1}^{\infty}$

Příklad 8: Určete (pokud je to možné) součet nekonečné řady:
a. $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n} =$
b. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n =$
c. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n =$
d. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} =$

Příklad 9: Nekonečná spirála se skládá z půlkružnic, z nichž každá má o třetinu menší poloměr, než ta předcházející. Určete délku spirály, jestliže první půlkružnice má poloměr 12 cm.

Příklad 10: Čtverci o straně 2 cm je opsána a vepsána kružnice. Do menší z kružnic vepíšeme čtverec a do něj opět kružnici a takto postupujeme do nekonečna. Určete součet obsahů a obvodů všech kružnic a všech čtverců.

Příklad 11: Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC_1 s pravým úhlem při C_1, který je polovinou rovnostranného trojúhelníku o straně 1. V tomto trojúhelníku ABC_1 uděláme výšku z vrcholu C_1, jejíž patu označíme C_2. V trojúhelníku AC_1C_2 uděláme opět výšku a nově vzniklý bod označíme C_3 atd. Určete délku lomené čáry, která spojuje vrcholy $C_1, C_2, C_3..., C_n, ..., A$ a součet obsahů trojúhelníků AC_nC_{n+1}

24. Matice, determinanty

Příklad 1: Jsou dány matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vypočítejte:
a. $A + D$
b. $B \cdot C$
c. $C \cdot B$
d. B^3
e.$2D - 3A$

Příklad 2: Řešte soustavu rovnic pomocí elementárních rádkových úprav matice. Řešení zapište vždy ve tvaru

$$[x_1;\, x_2;\, ...\, x_n] = ...$$

V případě nekonečného počtu řešení využijte vhodně parametry a určete, o jakou množinu bodů se z geometrického hlediska jedná (přímka, rovina, prostor, čtyřrozměrný prostor…). **Soustavy, které mají stejný počet neznámých, jako rovnic, řešte pomocí Cramerova pravidla.** *Tento příklad v sobě skrývá výpočty determinantů matic, proto mu věnujte zvýšenou pozornost*

1.
$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 1, \\ 3x - 2y - z &= -1, \\ x - 2y + 2z &= -7 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x - 2y - z + w &= -1, \\ x + y - 2z - 2w &= -5, \\ -x - y - 3z + 2w &= 0, \\ x + 2y - z + w &= 7 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} x - 2y + z &= -1, \\ 2x + y - 2z &= -2, \\ -3x + y + z &= 3, \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} x - y - z + w &= 0, \\ x - 2y + z - 2w &= 1, \\ 2x - 5y + 4z - 7w &= 3, \\ -3x + 10y - 11z + 18w &= -7 \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} 2x - 3y + z + 2w + 3v &= 4, \\ 4x - 4y - z + 4w + 11v &= 4, \\ 2y + z + 4v &= -5, \\ 2x - 5y - 2z + 2w - v &= 9, \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ 3x - y - z &= 4, \\ x + 5y + 5z &= -1, \end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + w &= -2, \\ 3x - y - 2z - 4w &= 1, \\ 2x + 3y - 5z + w &= -3, \end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned} x - 2y + 4z &= 2, \\ 2x + y - 2z &= -1, \\ 3x - y - 2z &= 1, \\ x + 3y - 6z &= -3 \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} x-y-z+w+v&=-1,\\ x+y-z-w-v&=0,\\ x+y+z+w-v&=2, \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} x+y+z+w+v&=2,\\ 2x-y-2z+w-v&=-1,\\ x-y-z-w+2v&=3,\\ y-w+3v&=5,\\ x-2y-3w+v&=3 \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned} 4x+3y-2z&=-4,\\ -3x-2y+3z&=7,\\ 5x+6y-4z&=-14, \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} 2x+3y+z+2w&=1,\\ 3x-y-2z+w&=-1,\\ -4x+5y+5z&=3,\\ 5x+2y-z+3w&=0, \end{aligned}$$

Příklad 3: Nalezněte matici A^* adjungovanou k matici A a následně určete matici A^{-1} inverzní k matici A. Poté vypočítejte inverzní matici také pomocí elementárních řádkových úprav. U příkladů označených hvězdičkou ověřte násobením, že se skutečně jedná o inverzní matici. *Tento příklad v sobě skrývá výpočty determinantů matic, proto mu věnujte zvýšenou pozornost.*

1.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3\\ 2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2*.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

4*.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

5.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6*.

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -3\\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

25. Komplexní čísla

Příklad 1: Vypočítejte podle pravidel pro výpočty s uspořádanými dvojicemi:

a. $[1;2] - [3;-1] \cdot [0;4]$

b. $[1;\frac{1}{3}] \cdot [-2;-1] - [\sqrt{2};1] \cdot [1;5]$

Příklad 2: Počítejte v algebraickém tvaru, určete komplexní číslo sdružené k výsledku a absolutní hodnotu výsledku:

a. $3 - i - i(4-2i)(5-i)(1-i)$

b. $(1-i)^3 - \dfrac{1}{1+i}$

c. $\dfrac{i+1}{2-4i} - \dfrac{3+i}{4-i}$

d. $\dfrac{(2-i)^2 + (4-3i)(1-i)}{i}$

e. $i^{1711} - i^{-235}$

Příklad 3: Převeďte číslo z na goniometrický tvar a následně určete hodnotu z^9 a zapište ji v algebraickém tvaru:

a. $z = -i$

b. $z = -1 - \sqrt{3}i$

c. $z = -4 + 4i$

d. $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

e. $z = -2$

f. $z = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

g. $z = \dfrac{-1+2i}{1+3i}$

h. $z = \dfrac{i-3}{2+i}$

Příklad 4: Vypočítejte všechny n-té odmocniny z komplexního čísla z. Dále určete, jaký útvar tvoří obrazy těchto odmocnin v rovině:

a. $z = i, n = 6$

b. $z = 1 + \sqrt{3}i, n = 8$

c. $z = 8, n = 3$

d. $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, n = 9$

Příklad 5: Řešte rovnici pro všechna komplexní čísla z, x:

a. $2z + 3\bar{z} = 5 + i$

b. $|z| - z = 6 + 2i$

c. $|z + i| = 2z + i$

d. $x^2 + 2x + 4 = 0$

e. $x^2 + (2-i)x + 3 - i = 0$

f. $(7+i)x^2 - 5ix - 1 = 0$

g. $x^6 - 1 = 0$

h. $x^{12} - 1 - i = 0$

e. $x^2 + (2-3i)x - 5 - 5i = 0$

f. $2x^2 - (1+i)x + 1 + i = 0$

g. $x^2 - (1+4i)x - 9 + 7i = 0$

h. $\frac{1}{4}x^2 + (2-\sqrt{3})ix + 1 + i2\sqrt{3} = 0$

g. $x^2 + (2-6i)x + 2 + 4i = 0$

h. $(1-i)x^2 + (i-5)x + 6 - 4i = 0$

Příklad 6: Řešte rovnici pro všechna komplexní čísla x a reálný parametr p:

a. $px^2 - x + (p+1) = 0$

b. $x^2 + (2+p)x + p = 0$

c. $(p+1)x^2 - (p+2)x + (p+3) = 0$

d. $x^2 - px + (p+3) = 0$

26. Limita a spojitost funkce, derivace funkce

Příklad 1 (typ úprava výrazů):

a. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{2x^2-x-1}$

b. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \dfrac{3x^2+5x-2}{4-108x^3}$

c. $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}} \dfrac{x^4+x^2-12}{x^4-2x^2-3}$

d. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-2x^3+2x^2-5x+2}{x^3-8}$

e. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2-\sqrt{6+x}}{x+2}$

f. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}+1}$

Příklad 2 (typ goniometrické vzorce):

a. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg} x}$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

c. $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-2\cos^2 x}{\sin x+\cos x}$

d. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{3x}$

e. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x+\sin 4x}{2x}$

f. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{5x^2}$

g. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin 2x}{x}$

h. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

Příklad 3 (limity s nekonečnem):

a. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^4-3x^3-7}{x^2-3x^4}$

b. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5x^3+6x^2-2x}{2x^4+x^5}$

c. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{-3x^7-2x^6+9}{3x^7-2x^2}$

d. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3^{x+2}+7}{3^{x-\frac{1}{2}}+4}$

e. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{2x^2-3x}}{3x+1}$

f. $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1})$

g. $\lim\limits_{x\to \infty} 3x-\sqrt{9x^2+6x}$

h. $\lim\limits_{x\to \infty} x\sqrt{x^2+1}-3x^2$

Příklad 4 (Eulerovo číslo):

a. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2x+1}$

b. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{3x-1}$

c. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+7}{x+2}\right)^{x-2}$

d. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x-3}{x-7}\right)^{\frac{1}{2}x-2}$

e. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x-2}{2x+5}\right)^{x-2}$

f. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{4x-3}{4x+12}\right)^{5x-2}$

g. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{3x+1}{3x+4}\right)^{4x-2}$

h. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{5x+2}{5x-5}\right)^{7x-2}$

Příklad 5: Načrtněte graf funkce f, pro kterou platí:

a. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=3,\quad \lim\limits_{x\to \infty} f(x)=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\infty,\quad \lim\limits_{x\to 1+} f(x)=-2$

b. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\infty,\quad \lim\limits_{x\to \infty} f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to 5} f(x)=-\infty$

c. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to \infty} f(x)=-2,\quad \lim\limits_{x\to -2-} f(x)=3,\quad \lim\limits_{x\to -2+} f(x)=4$

Příklad 6: Odvoďte z definice derivace vzorec pro:

a. derivaci součinu funkcí

b. derivaci podílu funkcí

c. derivaci funkce e^x

d. derivaci funkce $\sin x$

Příklad 7: Zderivujte funkci f a nalezněte definiční obor funkce f a její derivace:

a. $f: y = 4x^7 - 5\mathrm{tg}\, x + 2^x - \frac{\sqrt[4]{x}}{3} + 11$

b. $f: y = \ln x \cdot (x^3 - \sqrt{x})$

c. $f: y = \frac{x^3 - 2x^2}{1 + x^2}$

d. $f: y = \frac{\cos x - \sin x}{x}$

e. $f: y = \ln(x - x^3)$

f. $f: y = \sqrt{1 - \cos x}$

g. $f: y = e^{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$

h. $f: y = (\sin x)^x$

27. Užití derivace funkce (slovní úlohy na maxima a minima funkcí, tečna grafu funkce v bodě)

Příklad 1: Najděte rovnici tečny grafu funkce f v bodě T (bodech T_i):

a. $f: y = x^3 - 2x, \quad T[1; ?]$

b. $f: y = \sqrt{x} \cdot \ln x, \quad T[e^2; ?]$

c. $f: y = \frac{x-x^2}{1+x}, \quad T[2; ?]$

d. $f: y = \cos x - \sin x, \quad T[\frac{3\pi}{4}; ?]$

e. $f: y = 2^{1+\sqrt{x}}, \quad T[4; ?]$

f. $f: y = \arcsin\left(\dfrac{x}{1-x}\right), \quad T[-1; ?]$

Příklad 2: Najděte válec o maximálním objemu, který lze vepsat do koule o poloměru r.

Příklad 3: Na kružnici $k(S; r)$ je dán průměr AB. Najděte obdélník $KLMN$ s největším obsahem, který lze vepsat do půlkruhu určeného kružnicí k a průměrem AB tak, aby jeho strana KL ležela na průměru AB.

Příklad 4: Z papíru ve tvaru čtverce o straně 50 cm ustřihneme v rozích čtverce tak, aby vznikla krabička s maximálním objemem. Určete její výšku.

Příklad 5: Určete rozměry obdélníku s obsahem 16 cm^2 tak, aby jeho obvod byl minimální.

Příklad 6: Rozložte číslo 20 na dva sčítance tak, aby součet jejich odmocnin byl minimální.

Příklad 7: V továrně vyrábíme plechovky na pivo. Jaké rozměry musí mít půllitrová válcová plechovka, aby náklady na její výrobu byly minimální?

Příklad 8: Drát délky d dělíme na dvě části. Z jedné utvoříme kruh, z druhé rovnsotranný trojúhelník. Jak drát rozdělit, aby součet obsahů kruhu a trojúhelníku byl co nejmenší?

Příklad 9: Závod spočívá v tom, že je třeba běžet po pobřeží a následně doplavat k bójce na moři. Kdybychom chtěli plavat kolmo k pobřeží, běželi bychom 10 km a následně plavali 2 km. Kde je nejvýhodnější přejít od běhu k plavání, jestliže běžíme rychlostí 16 km za hodinu a plaveme rychlostí 6 km za hodinu?

Příklad 10: Do rovnostranného kuželu o výšce v vepište válec o maximálním objemu. Kolik procent objemu kužele tento válec zabírá?

28. Vyšetřování průběhu funkcí (pomocí diferenciálního počtu)

Příklad 1: Vyšetřete průběh funkce podle známého postupu (*definiční obor, sudost a lichost, průsečíky, intervaly, kde je funkce rostoucí, respektive klesající, konkávní, respektive konvexní, limity v nevlastních bodech, jednostranné limity v bodech, kde funkce není definována, asymptoty svislé i šikmé, graf a obor hodnot*):

a. $f: y = x^3 + 6x^2 + 9x$

b. $f: y = x^3 - x^2 - x + 1$

c. $f: y = (2-x)(x+1)^2$

d. $f: y = \dfrac{2x}{x^2+1}$

e. $f: y = \dfrac{x^3}{6x-12}$

f. $f: y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

g. $f: y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

h. $f: y = \dfrac{x}{(1-x^2)^2}$

i $f: y = \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+1}}$

j. $f: y = \dfrac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}$

k. $f: y = \dfrac{x(x+6)}{x+2}$

l. $f: y = \dfrac{x^2(x+2)}{(x+1)^2}$

m. $f: y = \dfrac{x^3}{3(2-x)^2}$

n. $f: y = \sqrt[3]{1-x^3}$

o. $f: y = (x^2+1)e^{-x}$

p. $f: y = x^3 \cdot e^{\frac{1}{x}}$

q. $f: y = e^{2x-x^2}$

r. $f: y = x - \ln(x+1)$

s. $f: y = \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)$

t. $f: y = e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$

29. Primitivní funkce (základní pojmy, výpočty neurčitých integrálů)

1) $\int x^3(4+x)^2\,\mathrm{d}x$

2) $\int 2^x - \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$

3) $\int \sqrt{x}\left(2-3\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x$

4) $\int \frac{(x+1)^3}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

5) $\int \frac{3x^3+\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt[4]{x^3}}{x}\,\mathrm{d}x$

6) $\int 2\sin x - 4\cos x\,\mathrm{d}x$

7) $\int 3\mathrm{tg}\,x - \mathrm{cotg}\,x\,\mathrm{d}x$

8) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

9) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$

10) $\int e^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x\,\mathrm{d}x$

11) $\int \ln x\,\mathrm{d}x$

12) $\int x\sin x\,\mathrm{d}x$

13) $\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x$

14) $\int \sin x\cos x\,\mathrm{d}x$

15) $\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$

16) $\int x^2 2^x\,\mathrm{d}x$

17) $\int (2x+5)\cos x\,\mathrm{d}x$

18) $\int x\,\mathrm{arccotg}\,x\,\mathrm{d}x$

19) $\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$

20) $\int x\ln^2 x\,\mathrm{d}x$

21) $\int \sqrt[3]{x}\ln x\,\mathrm{d}x$

22) $\int \cos(2x-3)\,\mathrm{d}x$

23) $\int e^{2x+1}\,\mathrm{d}x$

24) $\int (3x+5)^6\,\mathrm{d}x$

25) $\int \sin x e^{\cos x}\,\mathrm{d}x$

26) $\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x$

27) $\int \cos x\sqrt[3]{\sin x}\,\mathrm{d}x$

28) $\int \frac{e^{\mathrm{tg}\,x}}{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

29) $\int \frac{e^{2x}}{3+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$

30) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$

30. Užití určitého integrálu pro výpočet obsahů plošného obrazce a objemu rotačního tělesa

Příklad 1: Určete obsah plochy pod grafem funkce f od 0 do bodu a:

a. $f: y = x^3, a = \sqrt{2}$

b. $f: y = \cos x, a = \frac{\pi}{3}$

c. $f: y = \frac{1}{x}, a = \sqrt{e^3}$

d. $f: y = e^{-x}, a = 1$

e. $f: y = x \ln x, a = 1$

f. $f: y = e^x \sin x, a = \frac{\pi}{2}$

g. $f: y = \sqrt{x}, a = 16$

h. $f: y = x^2 - x^3, a = 1$

Příklad 2: Určete objem tělesa, které vznikne rotací plochy pod grafem f na daném intervalu okolo osy x. Nakreslete graf funkce f:

a. $f: y = 2 - x, x \in \langle 0; 2\rangle$

b. $f: y = x^2 + 1, x \in \langle 1; 2\rangle$

c. $f: y = \sin x, x \in \langle 0; \pi\rangle$

d. $f: y = \sqrt{x-3}, x \in \langle 3; 5\rangle$

e. $f: y = \dfrac{1}{x}, x \in \langle 1; 4\rangle$

f. $f: y = e^x, x \in \langle -1; 1\rangle$

Příklad 3: Načrtněte do jednoho obrázku grafy funkcí f a g, případně přímku p. Následně určete obsah plochy "mezi"těmito křivkami a osou x.

a. $f: y = x^2, g: y = x + 2$

b. $f: y = \frac{1}{x}, g: y = x, p: x = 2$

c. $f: y = x^2, g: y = \sqrt{x}$

d. $f: y = \sin x, g: y = \cos x$

e. $f: y = \sqrt{x-1}, g: y = x - 2$

f. $f: y = x^4, g: y = x^2$

g. $f: y = -2x^2 + 3, g: y = x^2$

h. $f: y = x^2 + 4x + 5, g: y = -x^2 - 2x + 1$

i. $f: y = x^3, g: y = x$

j. $f: y = \operatorname{tg} x, g: y = \cos x, p: x = 0$

Příklad 4: Proveďte pomocí integrálního počtu odvození vzorce pro:

a. obsah kruhu o poloměru r

b. objem koule o poloměru r

c. objem válce o výšce v a poloměru podstavy r

d. objem kužele o výšce v a poloměru podstavy r

e. objem kulové vrstvy, která vznikne z koule o poloměru r oříznutím ve výškách r_1 a r_2

f. objem komolého kuželu o výšce v a poloměru podstav r_1 a r_2